

距離化可能空間はコンパクトHausdorff空間の直和の商空間である

この命題は、一般位相幾何学において「距離空間（より一般に第1可算空間）はコンパクト生成空間（k-空間）である」という重要な性質に基づいています。

以下に証明のステップを示します。

1. コンパクトHausdorff空間の族と写像の構成

空間 X に含まれるすべてのコンパクト部分集合の族を $\mathcal{K} = \{K \subset X \mid K \text{ はコンパクト}\}$ とします。 X は距離化可能空間であるため、当然ハウスドルフ空間（Hausdorff空間）です。したがって、各 $K \in \mathcal{K}$ はそれに相対位相を入れるとコンパクトHausdorff空間になります。

これらを非交和として集めた直和位相空間を $Y = \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K$ とします。

ここで、自然な写像 $q: Y \rightarrow X$ を次のように定義します。

Y の元は、あるコンパクト部分集合 $K \in \mathcal{K}$ の元 x として定まるので、そのまま $q(x) = x$ とします。

2. q の連続性と全射性

- 全射性:** 任意の $x \in X$ に対して、1点集合 $\{x\}$ はコンパクトなので $\{x\} \in \mathcal{K}$ です。したがって、 x は Y の元として（少なくとも1つ）存在し、 $q(x) = x$ となるため、 q は全射です。
- 連続性:** 各 $K \in \mathcal{K}$ から X への包含写像 $\iota_K: K \hookrightarrow X$ は連続です。直和位相空間の普遍性質により、各成分空間での写像が連続であれば、それらをまとめた写像 q 全体も連続となります。

3. q が商写像であることの証明

X が Y の商位相空間になることを示すには、 q が商写像であること、すなわち「 X の部分集合 A が閉集合である $\iff q^{-1}(A)$ が Y で閉集合である」を示せば十分です。

- (\implies) q は連続写像なので、 A が X で閉集合ならば、 $q^{-1}(A)$ は自動的に Y で閉

集合になります。

- (\Leftarrow) 逆に、 $q^{-1}(A)$ が Y で閉集合であると仮定します。

直和位相の定義から、これは任意の成分 $K \in \mathcal{K}$ に対して、 $q^{-1}(A) \cap K$ が K において閉集合であることを意味します (ここでは K を Y の部分空間と同一視しています)。写像 q の定義上、 $q^{-1}(A) \cap K = A \cap K$ ですから、これは「任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対して、 $A \cap K$ は K で閉集合である」という状態を意味します。

4. 距離化可能性 (第1可算公理) の利用

ここで、 X が距離化可能空間であるという前提を用います。

距離化可能空間は**第1可算公理**を満たします。第1可算空間においては、「点列閉集合」と「通常の閉集合」が一致します。これを利用して、 A が実際に X において閉集合であることを示します。

A の任意の収束する点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ をとり、その X における極限を x とします。

このとき、集合 $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ を考えると、これは収束する点列とその極限点のみからなるため、 X のコンパクト部分集合になります。

したがって $C \in \mathcal{K}$ です。

前提より、 $A \cap C$ は C において閉集合です。

点列 (x_n) はすべて $A \cap C$ に含まれており、 C 内で x に収束するため、 $A \cap C$ が閉集合であることから極限 x も $A \cap C$ に含まれます。

よって $x \in A$ となり、 A は点列の極限について閉じている (点列閉集合である) ことが示されました。

前述の通り、 X は第1可算空間なので、点列閉集合であることは通常の閉集合であることと同値です。したがって、 A は X において閉集合です。

結論

以上より、 $q: Y \rightarrow X$ は連続な全射であり、かつ商写像であることが示されました。

したがって、 X はコンパクトHausdorff空間の族 \mathcal{K} の直和位相空間 $Y = \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K$ の商位相空間と同相になります。 ■